多段巡回型待ち行列網におけるサイクルタイム分布の積形式について(待ち行列理論とその周辺)

川島, 武

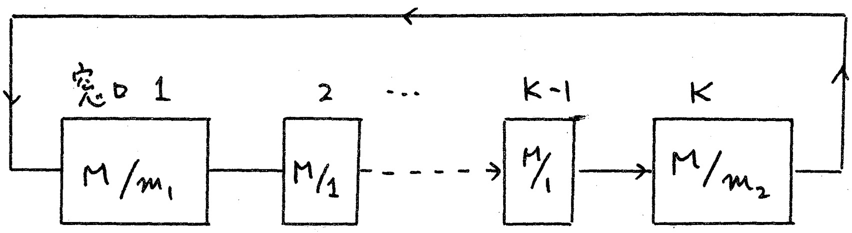
数理解析研究所講究録
564巻 1985年 165-172

多段巡回型待ち行列網における
サイクルタイム分布の積形式について

防大　川島　武 (Kawashima, Takeshi)

1. はじめに

図1のような巡回形待ち行列網を考察する。系内客数はNであり、オ1窓口から順にオK窓口までサービスを受け、さらにまたオ1窓口へと巡回しているものとする。各窓口では先着順の規律が行なわれており、パラメーター μ_i $(i=1,2,\cdots,K)$ の指数分布サービスを行うものとする。窓口数 m_i $(i=1,2,\cdots,K)$ は m_1, m_K 以外はすべて1である。



系内人数 N,　規律は FCFS

図1.

さて，N人の客の中から任意に1人選び，客とと呼ぶ。客とは他のN−1人の客と同様に何回も巡回するが，任意のサイクルでの才1窓口から才K窓口までの，各窓口での滞在時間（待ち時間＋サービス時間）の同時分布が，ここでは，いわゆる積形式となることを示す。図1のモデルで，Schassberger, Daduna(1984) ですでに導かれている。彼等は，客とが窓口1に到着した時点での系全体の状態を与えたときの，滞在時間分布のLaplace-Stieltjes変換に着目し，これらが満たす連立方程式を解いて，積形式を求めている。然し，計算は非常に多く，確かめるのも容易ではない。ここでは，これをもっと簡単に導くことを目的とする。

図1のモデルのうち，特定な形については，いくつかの結果が得られている。K=2 については，$m_1=m_2=1$ の場合を Chow (1980)，$m_1, m_2 \geqq 1$ の場合については Kawashima, Torigoe (1983) がそれぞれ得ている。$m_1=m_2=\cdots=m_K=1$ の場合には Boxma, Kelly, Konheim (1984) で与えられている。ここでの方法は Boxma, Kelly, Konheim の方法にヒントを得ている。

2．記号と定理

よく知られているように，図1のモデルでの，列の長さに関する平衡確率は積形式で表わされる。これを

$$\pi_N(q_1, q_2, \cdots, q_K) = \mathbb{P}((q_1(t), q_2(t), \cdots, q_K(t)) = (q_1, q_2, \cdots, q_K))$$

と書く。ここで $q_1 + q_2 + \cdots + q_K = N$, $\mathbb{P}$ は定常測度であり，時刻 t での列の長さ $q_1(t), q_2(t), \cdots, q_K(t)$ の分布は $\mathbb{P}$ のもとでは一定となる。客 c の i 窓口への到着時点列は $\mathbb{P}$ のもとで定常な点列であり，この点列に関して定常な Palm 測度を $\mathbb{P}_{i}$ $(i=1,\cdots,K)$ とする。（例えば Miyazawa (1977)）　$\mathbb{P}_i$ は客 c が時刻 0 に到着したという条件付きの $\mathbb{P}$ の測度とも考えることができる。時刻 0 で行なわれているサイクルでの第 1，第 2, …, 第 K 窓口での滞在時間をそれぞれ $S_1, S_2, \cdots, S_K$ とする。$\mathbb{P}_i$ のもとでは，S_i が時刻 0 で始まることになる。また各 S_i の始まる時刻での j 窓口の列の長さを q_{ij} と書く。q_{ii} には客 c は数えない。従って　$q_{i1} = q_1, q_{i2} = q_2, \cdots, q_{iK} = q_K$　ならば $\sum_j q_{ij} = N-1$ となっている。$\mathbb{P}_i$ について次が成立する。（例えば Kawashima (1978), Lavenberg, Reiser (1980)）

$$\mathbb{P}_i((q_{i1}, q_{i2}, \cdots, q_{iK}) = (q_1, q_2, \cdots, q_K)) = \pi_{N-1}(q_1, q_2, \cdots, q_K)$$
$$\text{ここで}\quad q_1 + q_2 + \cdots + q_K = N-1$$

さて $\mathbb{P}_1$ での $S_1, S_2, \cdots, S_K$ の分布をこれから考察するが，これを簡単のため $\mathbb{P}_1(S_1, S_2, \cdots, S_K)$ と書く。本来は $\mathbb{P}_1(S_1 \le s_1, \cdots, S_K \le s_K)$ etc. と書くべきものであるが，混乱は生じない。定義より次のように表わすことができる。

$\mathbb{P}_1(S_1, S_2, \cdots, S_K)$ ＝

$$= \sum_{q_1+\cdots+q_K=N-1} Pr(s_1, s_2, \cdots, s_K \mid q_{11}=q_1, \cdots, q_{1K}=q_K)\,\pi_{N-1}(q_1\cdots q_K)$$

ここで$Pr(\ \mid\ )$は推移確率であり、$\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \cdots, \mathbb{P}_K$に共通している。この$\mathbb{P}_1(s_1, s_2, \cdots, s_K)$が次のような積形式で表わせる。

定理 1

$$(2.1)\quad \mathbb{P}_1(s_1, s_2, \cdots, s_K) = \sum Pr(s_1 \mid q_{11}=q_1)\cdots Pr(s_K \mid q_{KK}=q_K)\,\pi_{N-1}(q_1\cdots q_K)$$

証明は§4で与える。各窓口での規律はFCFSであるので$Pr(s_i \mid q_{ii}=q_i)$は指数分布のconvolutionとして表わすことができる。

3. Quasi Reversibility

時刻tのシステムの状態を$Q(t)=(q_1(t), \cdots, q_K(t))$で表わす。$Q(t)$の挙動はマルコフ過程として表わすことができ、$\pi_N$が積形式であることより

$$\mathbb{P}(Q(t)=(\cdots, q_i, q_{i+1}, \cdots), Q(t+h)=(\cdots, q_i-1, q_{i+1}+1, \cdots))$$

$$= \pi_N(\cdots, q_i, q_{i+1}, \cdots)\,\mu_i h + o(h)$$

$$= \pi_N(\cdots, q_i-1, q_{i+1}+1, \cdots)\,\mu_{i+1} h + o(h) \qquad (\text{但し } q_i \geqq 1)$$

などが成立する。これは$Q(t)$の時間に関する逆過程は、丁度図1のシステムで客が逆方向に巡回するモデルの過程$Q^R(t)$と一致し、いわゆるQuasi Reversibilityが成立している。従って図1のシステムを時間を逆向きにして見たとき、個々の客の挙動は別にして、列の長さの変化は逆向きに回るモデルと一致する。(Quasi Reversibilityについては Kelly(1979))。

次が成立つ。添字Rは逆向きモデルを表わす。)

Lemma 3.1

$$P_r(S_1 \mid q_{21} = q_1) = P_r(S_1 \mid q_{11} = q_1) \quad (q_1 = 0, 1, \cdots, N-1)$$

この補助定理は、客とが窓口1でのサービスを終了した時列の長さがq_1であった場合、S_1の分布は、到着した時にq_1である場合の分布に一致していることを意味している。証明はQuasi Reversibilityであることを利用し、$P_r(S_1^R \mid q_{11}^R = q_1)$と$P_r(S_1 \mid q_{21} = q_1)$が一致することから導びかれる。詳しくはBurke(1968) p1151 の議論を適用すればよい。

4. 定理1の証明

$\mathbb{P}_1$のもとでは$(q_{11}, q_{12}, \cdots, q_{1K})$の分布が、また$\mathbb{P}_i$のもとでは$(q_{i1}, q_{i2}, \cdots, q_{iK})$の分布が$\pi_{N-1}(\cdot)$であることは明らかであるが、$S_1, S_2, \cdots, S_K$の分布も、$\mathbb{P}_1$のもとでも$\mathbb{P}_i$のもとでも同一であることが、エルゴード性を用いて示される。(Kawashima(1982))。すなわち

Lemma 4.1

$$\mathbb{P}_1(S_1, S_2, \cdots S_K) = \mathbb{P}_i(S_1, S_2, \cdots, S_K) \quad (i = 1, 2, \cdots, K)$$

または

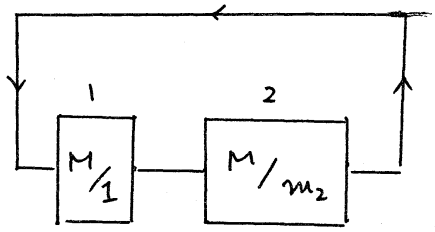
$$\sum P_r(S_1, S_2, \cdots, S_K \mid q_{11} = q_1, \cdots, q_{1K} = q_K)\,\pi_{N-1}(q_1, \cdots, q_K)$$
$$= \sum P_r(S_1, S_2, \cdots, S_K \mid q_{i1} = q_1, \cdots, q_{iK} = q_K)\,\pi_{N-1}(q_1, q_2, \cdots q_K)$$

このLemma 4.1が主張することは他のモデルでも成立する。

定理1を窓口数について帰納法で証明する。まず

Lemma 4.2

$K=2$, $m_1=1$（右図）で(2.1)がなり立つ。



客が窓口1のサービスを終了した時の、システムの状態(q_{21}, q_{22})が与えられれば、滞在時間S_1, S_2は条件付き独立となることから証明される。(Kawashima, Torigoe (1983))

定理1の証明

仮定A：右図のような系では積形式が成立するものとする。

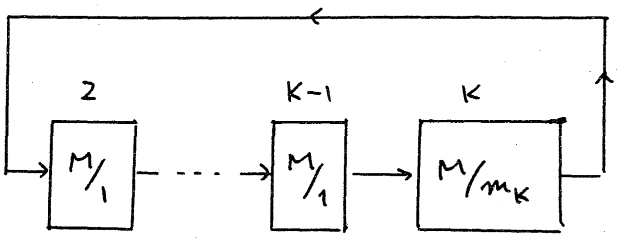


図1のシステムについて、客cの窓口1のサービスが終了した直後、すなわちP_2のもとで考察する。$(q_{21}, q_{22}, \cdots, q_{2K})$が与えられたもとでは、$S_1$と$(S_2, \cdots, S_K)$は条件付き独立である。なぜなら、$q_{21}$に含まれる客は客cが窓口Kでサービスを開始するまでは追い抜くことはなく、客cのそれまでの待ち時間に影響を与えることはないからである。$S_2, S_3, \cdots, S_K$は仮定Aにあるシステムの滞在時間と確率的に同一であることより次を得る。

$$\mathbb{P}_2(s_1,\cdots,s_K)$$

$$= \sum_{q_1+\cdots+q_K=N-1} P_r(s_1,\cdots,s_K \mid q_{21}=q_1,\cdots,q_{2K}=q_K)\,\pi_{N-1}(q_1,\cdots,q_K)$$

$$= \sum P_r(s_1 \mid q_{21}=q_1)\,P_r(s_2\cdots s_K \mid q_{22}=q_2,\cdots,q_{2K}=q_K)\,\pi_{N-1}(q_1\cdots,q_K)$$

$$= \sum_{q_1=1}^{N-1} P_r(s_1 \mid q_{11}=q_1) \sum_{q_2+\cdots+q_K=N-q_1-1} P_r(s_2\cdots,s_K \mid q_2\cdots q_K)\,\pi_{N-1}(q_1\cdots q_K)$$

ここで積形式であることより $\pi_{N-1}(q_1 q_2\cdots q_K)/\pi_{N-q_1-1}(q_2,\cdots,q_K)$

(但し．$\pi_{N-q_1-1}(q_2,\cdots,q_K)$ は仮定Aのモデルに対するもの)

は q_1 だけの関数であること．及び仮定Aより

$\sum P_r(s_2\cdots s_K \mid q_2\cdots q_K)\,\pi_{N-1-q_1-1}(q_2\cdots q_K)$ は積形式となるから

$$= \sum_{q_1=1}^{N-1} P_r(s_1 \mid q_1) \sum_{q_2+\cdots+q_K=N-q_1-1} \prod_{j=2}^{K} P_r(s_j \mid q_j)\,\pi_{N-q_1-1}(q_2\cdots q_K)\cdot\pi_{N-q_1-1}(q_2\cdots q_K)^{-1}$$
$$\cdot\,\pi_{N-1}(q_2\cdots q_K)$$

$$= \sum_{q_1+\cdots+q_K=N-1} \prod_{j=1}^{K} P_r(s_j \mid q_{jj}=q_j)\,\pi_{N-1}(q_1 q_2\cdots q_K)$$

を得る。仮定Aの証明は上記の証明で $m_1=1$ とすればよい。

5．他の規律について

今まで各窓口での規律はFCFSとしたが、窓口1，Kについて他の規律、例えばP.S などを仮定してみたが上記の方法では積形式を導くことはできない。実際にも成立していないであろう。但し．K=2 については成立している。川島・上岡(1984)

6. 滞在時間の順序または窓口の並び方

図1でS_Kに引き続く窓口1，2,…,Kでの滞在時間をS_1', S_2',…, S_K'とする。一周する一つのサイクルS_i, S_{i+1},… S_K, S_1',…, S_{i-1}'の同時分布は必ずしも(2.1)とはならない。つまり、many serverの窓口が途中にある場合では、追い越しが生じることもあるため、もっと複雑になるのであろう。

REFERENCES

Boxma, O.J., F.P. Kelly, A.G. Konheim (1984) :The product form distribution in cyclic exponential queues, J.A.C.M. 31, 128-133

Burke, P.J. (1968) :The output of a queuing system, A.M.S., 39, 1144-1152

Chow, W. M. (1980) :The cycletime distribution of exponential queues, J.A.C.M. 27, 281-286

Kawashima, T. (1978) :Turnaround time equations in queueing networks, Opn.Res.J, 21, 477-485

Kawashima, T. (1982) :A property of two Palm measures in queueing networks and its applications, Opn.Res.J., 25, 16-28

Kawashima, T., N. Torigoe (1983):The cycle time distribution in a central server queueing system with multi-server stations, Memo.Def.Acad., 23, 155-160

Kelly, F.P., (1979) :Reversibility and stochastic networks, Wiley, Chichster and New York

Lavenberg, S.S., M. Reiser, (1980) :Stationary state probabilities at arrival instants for closed queueing networks with multiple types of customers, J.Appl.Prob., 17, 1048-1061

Miyazawa, M., (1977) :Time and customer processes in queues with stationary inputs, J.Appl.Prob., 14, 349-357

Schassberger, R., H. Daduna (1984) :Sojourn times in queueing networks with multiserver nodes, Preprint

上岡，川島(1984)：セントラルサーバモデルの滞在時間，数理解析研究所講究録 519, 86-98